

Soal Kuis 2 Kalkulus 2 (35)

1. Diketahui suatu kurva fungsi dengan persamaan $y = x^{\frac{2}{3}}$.
 - (a) Gambarkan kurva dari persamaan tersebut untuk $-8 \leq x \leq 8$.
 - (b) Tentukan panjang busur untuk $0 \leq x \leq 8$.
 - (c) Jelaskan mengapa rumus panjang busur, yaitu $\int_a^b \sqrt{1 + [f'(x)]^2}$ tidak dapat digunakan secara langsung?
2. Suatu bidang yang dibatasi oleh kurva $y = 4x - x^2$ dan $y = x$.
 - (a) Tentukan titik berat bidang tersebut!
 - (b) Jika diputar pada garis $y = x - 2$, tentukan volume benda putar!
3. Tentukan persamaan garis singgung kurva: $x = t$, $y = t^2$ di $t = 2$!

Pembahasan Kuis 2 Kalkulus 2 (35)

1. Menggambar Kurva dan Menentukan Panjang Kurva

(a) Menggambar Kurva

- Untuk menentukan gambar kurva, terdapat beberapa langkah yang dapat dilakukan, antara lain:
- **Cek titik potong dengan sumbu koordinat:**

$$x = 0 \Rightarrow y = 0$$

Sehingga titik potong dengan sumbu- x dan sumbu- y adalah $(0, 0)$.

- **Cek titik stasioner:**

Turunan pertama fungsi adalah:

$$y' = \frac{2}{3}x^{-1/3} = \frac{2}{3\sqrt[3]{x}}$$

Tidak ada nilai x yang menyebabkan pembilang bernilai nol. Akan tetapi, turunan tidak terdefinisi pada $x = 0$. Oleh karena itu, titik $(0, 0)$ merupakan titik kritis.

- **Cek fungsi naik dan fungsi turun:**

Untuk $x < 0$ berlaku:

$$y' = \frac{2}{3\sqrt[3]{x}} < 0$$

sehingga fungsi turun.

Untuk $x > 0$ berlaku:

$$y' = \frac{2}{3\sqrt[3]{x}} > 0$$

sehingga fungsi naik.

Berdasarkan hasil tersebut, dapat disimpulkan bahwa kurva turun pada $x < 0$ dan naik pada $x > 0$.

- **Cek kecekungan fungsi:**

Turunan kedua fungsi adalah:

$$y'' = -\frac{2}{9}x^{-4/3}$$

Karena $x^{-4/3} > 0$ untuk setiap $x \neq 0$, maka:

$$y'' < 0$$

Dengan demikian, kurva cekung ke bawah untuk seluruh $x \neq 0$.

- **Pengecekan atau Plot Titik pada Koordinat:**

Beberapa titik yang mudah dihitung adalah:

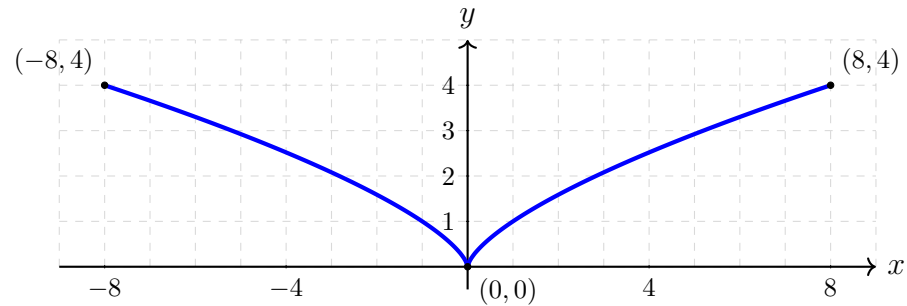
$$(-8, 4), (-1, 1), (0, 0), (1, 1), (8, 4)$$

Selain itu, fungsi bersifat simetris terhadap sumbu- y karena:

$$f(-x) = (-x)^{2/3} = x^{2/3} = f(x)$$

• **Gambar kurva:**

Berdasarkan hasil analisis di atas, kurva memiliki titik *cusp* pada $(0, 0)$, turun pada $x < 0$, naik pada $x > 0$, cekung ke bawah, dan simetris terhadap sumbu- y .



(b) Menentukan panjang busur untuk $0 \leq x \leq 8$.

Panjang busur diberikan oleh integral tak wajar karena y' tidak terdefinisi di $x = 0$:

$$L = \lim_{a \rightarrow 0^+} \int_a^8 \sqrt{1 + (y')^2} dx$$

Karena $y' = \frac{2}{3}x^{-1/3}$, maka:

$$L = \lim_{a \rightarrow 0^+} \int_a^8 \sqrt{1 + \frac{4}{9x^{2/3}}} dx$$

Gunakan substitusi:

$$x = t^3 \implies dx = 3t^2 dt$$

Ketika $x = a$, diperoleh batas bawah baru $t = \sqrt[3]{a}$. Kita definisikan variabel batas baru $b = \sqrt[3]{a}$, di mana jika $a \rightarrow 0^+$, maka $b \rightarrow 0^+$.

Ketika $x = 8$, diperoleh batas atas $t = 2$. Sehingga integralnya menjadi:

$$L = \lim_{b \rightarrow 0^+} \int_b^2 \sqrt{1 + \frac{4}{9t^2}} (3t^2) dt$$

Karena $\sqrt{1 + \frac{4}{9t^2}} = \frac{\sqrt{9t^2 + 4}}{3t}$ untuk $t > 0$, maka bentuk di dalam limit menyederhanakan menjadi:

$$L = \lim_{b \rightarrow 0^+} \int_b^2 t \sqrt{9t^2 + 4} dt$$

Misalkan $u = 9t^2 + 4$, sehingga $du = 18t dt$ atau $t dt = \frac{du}{18}$. Batas integral untuk variabel u berubah menjadi dari $9b^2 + 4$ sampai $9(2)^2 + 4 = 40$. Maka:

$$L = \lim_{b \rightarrow 0^+} \frac{1}{18} \int_{9b^2+4}^{40} u^{1/2} du$$

Lakukan integrasi terhadap u :

$$\begin{aligned} L &= \lim_{b \rightarrow 0^+} \frac{1}{27} u^{3/2} \Big|_{9b^2+4}^{40} \\ &= \lim_{b \rightarrow 0^+} \frac{1}{27} [40^{3/2} - (9b^2 + 4)^{3/2}] \end{aligned}$$

Evaluasi nilai limit saat $b \rightarrow 0^+$:

$$\begin{aligned} L &= \frac{1}{27} [40^{3/2} - (9(0)^2 + 4)^{3/2}] \\ &= \frac{1}{27} [40^{3/2} - 4^{3/2}] \\ &= \frac{1}{27} [80\sqrt{10} - 8] \end{aligned}$$

Jadi, panjang busur untuk $0 \leq x \leq 8$ melalui pendekatan integral tak wajar adalah:

$$L = \frac{80\sqrt{10} - 8}{27}$$

- (c) Penjelasan rumus panjang busur tidak dapat digunakan secara langsung adalah karena pada kurva tersebut turunan pertama, yaitu:

$$y' = \frac{2}{3}x^{-1/3}$$

tidak terdefinisi ketika $x = 0$. Akibatnya, integran $\sqrt{1 + (y')^2}$ juga tidak terdefinisi pada batas bawah interval tersebut.

Oleh karena itu, integral panjang busur harus dipandang sebagai integral tak wajar (*improper integral*), yaitu:

$$L = \lim_{a \rightarrow 0^+} \int_a^8 \sqrt{1 + \frac{4}{9x^{2/3}}} dx$$

Dengan menggunakan pendekatan limit tersebut, diperoleh nilai panjang busur yang berhingga. Sehingga, panjang busur tetap dapat dihitung dengan valid meskipun nilai turunannya tidak terdefinisi tepat pada $x = 0$.

2. Menentukan Titik Berat dan Volume Benda Putar

- (a) Menentukan Titik Berat.

Dalam menentukan titik berat, terdapat beberapa langkah yang dapat dilakukan, yakni sebagai berikut.

- Titik puncak dari $y = 4x - x^2$ adalah:

$$x_p = -\frac{b}{2a} = -\frac{4}{2(-1)} = 2$$

Lalu, ketika disubstitusi nilai x_p ke dalam persamaan kuadrat tersebut, diperoleh nilai y_p adalah:

$$y_p = 4(2) - (2)^2 = 8 - 4 = 4$$

Sehingga titik puncaknya adalah $(2, 4)$.

- Titik potong dengan sumbu- x dan sumbu- y pada grafik.

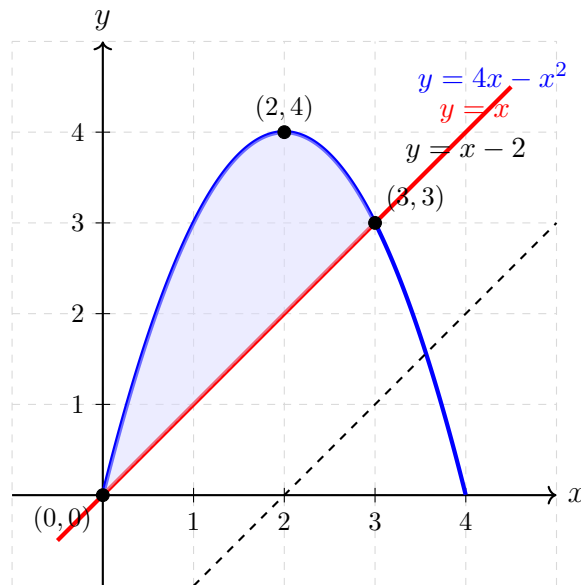
Untuk $y = 4x - x^2$:

- Potong sumbu- x ($y = 0$): $4x - x^2 = 0 \implies x(4 - x) = 0 \implies x = 0$ atau $x = 4$. Titiknya $(0, 0)$ dan $(4, 0)$.

– Potong sumbu- y ($x = 0$): $y = 4(0) - (0)^2 = 0$. Titiknya $(0, 0)$.

Untuk $y = x$, kurva melalui titik asal $(0, 0)$ dan memiliki kemiringan 1.

- Berdasarkan karakteristik di atas, maka diperoleh gambar kurva $y = 4x - x^2$ dan $y = x$ adalah sebagai berikut.



Dengan titik potongnya dapat diperoleh dengan:

$$\begin{aligned} y_1 &= y_2 \\ 4x - x^2 &= x \\ 3x - x^2 &= 0 \\ x(3 - x) &= 0 \end{aligned}$$

Diperoleh batas integral dari $x = 0$ sampai $x = 3$. Titik potongnya berada di $(0, 0)$ dan $(3, 3)$.

- Menentukan rumus titik berat.

Berikut ini adalah persamaan yang dapat dibentuk untuk menentukan titik berat ($\bar{x}$ dan $\bar{y}$) dari daerah yang dibatasi oleh $y_1 = 4x - x^2$ dan $y_2 = x$.

$$\bar{x} = \frac{\int_a^b x[y_1 - y_2] dx}{\int_a^b [y_1 - y_2] dx}, \quad \bar{y} = \frac{\frac{1}{2} \int_a^b [(y_1)^2 - (y_2)^2] dx}{\int_a^b [y_1 - y_2] dx}$$

Sehingga, untuk menyelesaikan soal tersebut, cari satu persatu pembilang dan penyebut dari $\bar{x}$ dan $\bar{y}$.

1. Menghitung Luas Daerah (A sebagai penyebut):

$$\begin{aligned} A &= \int_0^3 ((4x - x^2) - x) dx = \int_0^3 (3x - x^2) dx \\ &= \left[\frac{3}{2}x^2 - \frac{1}{3}x^3 \right]_0^3 = \left(\frac{27}{2} - 9 \right) - 0 = \frac{9}{2} \end{aligned}$$

2. Menghitung Momen terhadap Sumbu- y (M_y sebagai pembilang $\bar{x}$):

$$\begin{aligned} M_y &= \int_0^3 x(3x - x^2) dx = \int_0^3 (3x^2 - x^3) dx \\ &= \left[x^3 - \frac{1}{4}x^4 \right]_0^3 = \left(27 - \frac{81}{4} \right) - 0 = \frac{27}{4} \end{aligned}$$

Maka, nilai $\bar{x}$ adalah:

$$\bar{x} = \frac{M_y}{A} = \frac{27/4}{9/2} = \frac{27}{4} \times \frac{2}{9} = \frac{3}{2} = 1.5$$

3. Menghitung Momen terhadap Sumbu- x (M_x sebagai pembilang $\bar{y}$):

$$\begin{aligned} M_x &= \frac{1}{2} \int_0^3 [(4x - x^2)^2 - x^2] dx \\ &= \frac{1}{2} \int_0^3 [(16x^2 - 8x^3 + x^4) - x^2] dx \\ &= \frac{1}{2} \int_0^3 (x^4 - 8x^3 + 15x^2) dx \\ &= \frac{1}{2} \left[\frac{1}{5}x^5 - 2x^4 + 5x^3 \right]_0^3 \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{243}{5} - 162 + 135 \right) = \frac{1}{2} \left(\frac{243}{5} - 27 \right) \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{108}{5} \right) = \frac{54}{5} = 10.8 \end{aligned}$$

Maka, nilai $\bar{y}$ adalah:

$$\bar{y} = \frac{M_x}{A} = \frac{54/5}{9/2} = \frac{54}{5} \times \frac{2}{9} = \frac{12}{5} = 2.4$$

Maka dari itu, diperoleh titik beratnya adalah $(\bar{x}, \bar{y}) = (\frac{3}{2}, \frac{12}{5}) = (1.5, 2.4)$.

(b) Menentukan Volume Benda Putar dengan Dalil Guldin I

- Menentukan jarak sumbu putar ke pusat massa atau titik berat.

Ubah persamaan garis sumbu putar menjadi bentuk umum persamaan garis $ax + by + c = 0$.

$$y = x - 2 \implies x - y - 2 = 0$$

Diperoleh nilai $a = 1$, $b = -1$, dan $c = -2$.

Setelah itu, tentukan jaraknya (d) dari pusat massa $(\bar{x}, \bar{y}) = (1.5, 2.4)$ menggunakan rumus jarak antara titik dan garis:

$$\begin{aligned} d &= \frac{|a\bar{x} + b\bar{y} + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}} \\ &= \frac{|1(1.5) + (-1)(2.4) - 2|}{\sqrt{1^2 + (-1)^2}} \\ &= \frac{|1.5 - 2.4 - 2|}{\sqrt{2}} = \frac{|-2.9|}{\sqrt{2}} = \frac{2.9}{\sqrt{2}} \end{aligned}$$

- Menentukan volume dengan Dalil Guldin I.

$$\begin{aligned}
 V &= 2\pi \cdot d \cdot A \\
 &= 2\pi \cdot \left(\frac{2.9}{\sqrt{2}}\right) \cdot \left(\frac{9}{2}\right) \\
 &= \frac{26.1}{\sqrt{2}}\pi = \frac{26.1\sqrt{2}}{2}\pi = 13.05\sqrt{2}\pi
 \end{aligned}$$

Sehingga diperoleh volume benda putarnya adalah satuan volume.

$$\frac{261\sqrt{2}}{20}\pi \approx 13.05\sqrt{2}\pi$$

3. Menentukan Persamaan Garis Singgung

- Menentukan letak titik singgung dengan substitusi $t = 2$ ke dalam persamaan parametrik

Diketahui:

$$x = t, \quad y = t^2$$

Untuk $t = 2$ diperoleh:

$$x = 2, \quad y = 2^2 = 4$$

Jadi titik singgungnya adalah:

$$(x, y) = (2, 4).$$

- Menentukan gradien garis singgung pada titik tersebut
Gradien garis singgung untuk kurva parametrik diberikan oleh

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}.$$

Turunkan masing-masing persamaan parametrik terhadap t :

$$\frac{dx}{dt} = 1, \quad \frac{dy}{dt} = 2t.$$

Maka

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2t}{1} = 2t.$$

Pada $t = 2$ diperoleh gradien

$$m = 2(2) = 4.$$

- Menentukan persamaan garis singgung berdasarkan gradien dan titik yang ada.

$$y - y_1 = m(x - x_1).$$

Dengan titik $(2, 4)$ dan gradien $m = 4$, diperoleh

$$y - 4 = 4(x - 2).$$

Sederhanakan:

$$\begin{aligned} y - 4 &= 4x - 8 \\ y &= 4x - 4. \end{aligned}$$

Sehingga, diperoleh bahwa persamaan garis singgung kurva $x = t$, $y = t^2$ di $t = 2$ adalah:

$$\boxed{y = 4x - 4}.$$